RÉDUCTIONDESÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 7 : Résolution d'équations

Guide de l'élève

Module 7

Résolution d’équations

Évaluation diagnostique

1. Miguel tente de résoudre une équation par essais systématiques. Selon toi, la valeur qu'il utilise pour son premier essai représente-t-elle un bon choix? Explique ta réponse.

a) $3x + 24 = 95$ 1er essai : 25

b) $2x - 18 = 146$ 1er essai : 73

c) $500 - 6s = 116$ 1er essai : 50

2. Raina a tenté de résoudre quelques équations en procédant par essais systématiques. Étant donné la valeur utilisée pour son premier essai, quelle valeur serait un bon choix pour son deuxième essai? Pourquoi?

a) $5x - 30 = 65$ 1er essai : 20

b) $124 = 200 - 4s$ 1er essai : 30

c) $7m + 18 = 165$ 1er essai : 10

3. Résous chaque équation par essais systématiques. Énumère tous tes essais, ainsi que les résultats obtenus dans chaque cas.

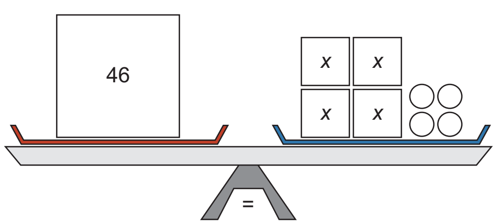
a) $6g + 23 = 101$

b) $12m - 80 = 64$

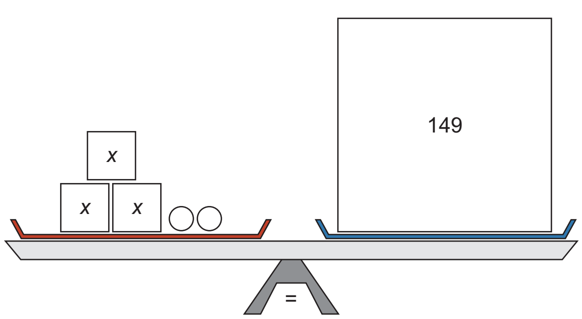
c) $348 = 500 - 8m$

4. Quelle équation chacune des balances à plateaux modélise-t-elle?

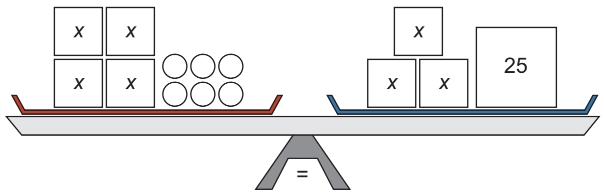
a)



b)



c)



5. Tu veux résoudre les équations de la question 4 à l'aide du modèle de la balance à plateaux. Indique pour chacune la première opération que tu effectuerais.

6. Modélise chacune des équations suivantes à l'aide de la balance à plateaux, puis indique la première opération que tu effectuerais pour les résoudre.

a) $5g + 17 = 63$

b) $3m + 25 = 2m + 31$

7. Quelle opération effectuerais-tu en premier lieu pour résoudre algébriquement les équations suivantes?

a) $6m + 14 = 86$

b) $9m - 600 = 228$

c) $154 - 3m = 58$

d) $5m + 8 = 2m + 149$

8. Résous algébriquement chaque équation de la question 7.

9. Crée, dans chaque cas, deux équations pour lesquelles la résolution par la méthode algébrique fait appel aux opérations données.

a) diviser par 4

b) soustraire 12

c) additionner 12, puis diviser par 3

10. Quelle opération effectuerais-tu en premier lieu pour isoler x dans chacune des équations suivantes?

a) $y = 2x$

b) $y = x + 50$

c) $y = 2x - 80$

11. Isole la variable t dans chacune des équations suivantes.

a) $m = t + 10$

b) $m = 4t$

c) $m = 3t - 9$

d) $3m = 4t$

e) $3m = 6t + 8$

f) $2m + 4t = 60$

Résolution d'équations par essais systématiques

Question ouverte

On peut parfois résoudre une équation en tentant de substituer une valeur à l'inconnue.

- Crée cinq équations différentes comportant l'inconnue *k* et pour lesquelles 15 pourrait être un bon choix comme premier essai dans la résolution de l'équation, sans toutefois en être la solution.

  Au moment de créer tes équations, assure-toi de tenir compte des autres conditions suivantes :
  - certaines des équations doivent contenir des additions et d'autres, des soustractions;
  - le coefficient de *k* ne doit jamais être 1;
  - certains des coefficients de *k* doivent être négatifs;
  - dans certains cas, *k* doit faire partie de chaque membre de l'équation;
  - la solution doit parfois être un nombre décimal.

- Résous chaque équation. Décris ta démarche.

Fiche de réflexion

On peut résoudre une équation par essais systématiques, c'est-à-dire en choisissant d'abord une valeur possible de l'inconnue, en vérifiant ensuite cette valeur dans l'équation et, si nécessaire, en faisant un nouvel essai qui tient compte du résultat du dernier essai.

Par exemple, pour résoudre l'équation $3x - 8 = 19$, on peut d'abord choisir 10 comme valeur possible de x. C'est un bon choix, puisque c'est un nombre avec lequel il est facile d'effectuer des opérations arithmétiques.

1^er^ essai : 10

$3 \times 10 - 8 = 22$	22 est trop élevé. On doit donc essayer un nombre plus petit que 10.

2^e^ essai : 9

$3 \times 9 - 8 = 19$	19 est le résultat recherché. La solution est donc $x = 9$.

Cette méthode fonctionne relativement bien même lorsque la solution est un nombre à une décimale, mais elle est plus ardue lorsque la solution est un nombre à deux décimales ou plus.

Par exemple, pour résoudre l'équation $5x + 3 = 29$, on peut d'abord choisir 5 comme valeur possible de x. C'est un bon choix puisque $5 \times 5 = 25$, et 25 est proche de 29.

1^er^ essai : 5

$5 \times 5 + 3 = 28$	28 est trop bas, mais de bien peu.

2^e^ essai : 5,3

$5 \times 5{,}3 + 3 = 29{,}5$	29,5 est trop élevé.

3^e^ essai : 5,2

$5 \times 5{,}2 + 3 = 29$	C'est le résultat recherché, donc la solution est 5,2.

Si la solution d'une équation est un nombre décimal tel que 4,1286 ou un nombre ayant une suite infinie de décimales, on risque de faire de nombreux essais ou de ne jamais trouver la solution. C'est pourquoi la méthode de résolution d'équations par essais systématiques convient davantage aux équations dont la solution est un nombre entier ou un nombre décimal simple.

1. Selon toi, 10 représente-t-il un bon choix comme premier essai pour résoudre chacune des équations suivantes? Explique pourquoi.

a) $5x - 8 = 40$

b) $37 + 17x = 160$

c) $300 - 12s = 200$

2. Quelle valeur constitue un bon choix comme premier essai pour résoudre chacune des équations suivantes? Explique pourquoi.

a) $6x + 3 = 117$

b) $8x - 37 = 107$

c) $56 - 3x = 14$

d) $46 + 5x = 93$

e) $53 = 212 - 5x$

3. Crée trois équations comportant le terme $15x$ et pour lesquelles 20 constitue un bon choix comme premier essai de solution.

4. Tu utilises $x = 20$ comme premier essai pour résoudre chacune des deux équations ci-dessous. Pourquoi choisirais-tu, pour le deuxième essai, une valeur supérieure à 20 pour l'une et inférieure à 20 pour l'autre?

$6x + 18 = 150$

$180 - 5x = 85$

5. Tu tentes de résoudre les équations suivantes par essais systématiques. Tu fais un premier essai et tu obtiens le résultat indiqué. Quelle valeur choisirais-tu pour un deuxième essai? Explique pourquoi.

a) $8x - 36 = 100$ 1er essai : 10 Résultat : $8 \times 10 - 36 = 44$

b) $12m - 35 = 277$ 1er essai : 20 Résultat : $12 \times 20 - 35 = 205$

c) $500 - 4c = 144$ 1er essai : 100 Résultat : $500 - 4 \times 100 = 100$

6. Résous chacune des équations suivantes par essais systématiques.

a) $9t + 17 = 224$

b) $15m - 123 = 387$

c) $400 - 6j = 262$

d) $134 = 8c + 58$

e) $516 = 4k - 38$

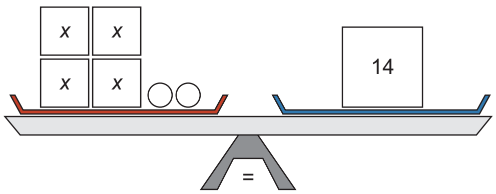
f) $48 + 6k = 10k - 164$

7. Donne un exemple d'une équation pour laquelle il n'est pas souhaitable d'utiliser la méthode de résolution par essais systématiques et explique pourquoi.

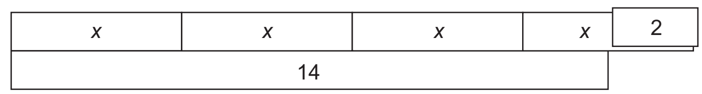
Résolution d'équations à l'aide de modèles

Question ouverte

Le modèle de la balance à plateaux représente l'équation $4x + 2 = 14$, alors que le modèle de rectangles superposés représente l'équation $4x – 2 = 14$



Modèle de la balance à plateaux



Modèle de rectangles superposés

- Explique de quelle façon chaque modèle représente l'équation en question.

- Décris de quelle façon on peut utiliser chacun des modèles pour résoudre l'équation.

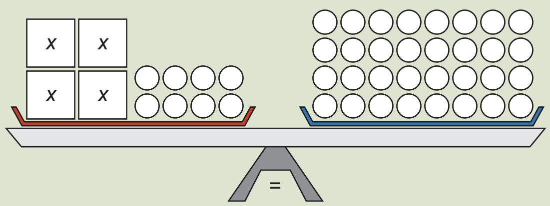
- Crée cinq équations et modélise-les en utilisant soit un des deux modèles, soit les deux, tout en tenant compte des conditions suivantes :
  - certaines de tes équations doivent contenir des soustractions;
  - le coefficient de l'inconnue ne doit jamais être 1;
  - dans au moins un cas, l'inconnue doit faire partie de chaque membre de l'équation.

- Pour chacune des équations que tu as créées, décris de quelle façon tu peux utiliser le modèle choisi pour la résoudre.

Fiche de réflexion

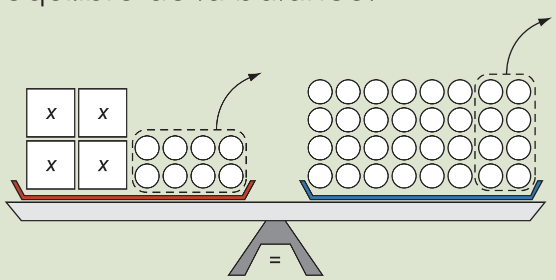
Une équation est un énoncé mathématique qui comporte une inconnue (ou des variables) et qui décrit une relation d'égalité entre les expressions qui se situent de chaque côté du signe =.

Une façon de résoudre l'équation, c'est-à-dire de déterminer la valeur de l'inconnue qui rend la relation d'égalité vraie, est de modéliser l'équation à l'aide d'une balance à plateaux. Par exemple, pour modéliser l'équation $4x + 8 = 32$ à l'aide d'une balance à plateaux, on représente le terme $4x$ à l'aide de 4 cubes marqués d'un x et les termes constants à l'aide de jetons.



Note : Ce modèle représente l'idée que la masse totale des 4 cubes et des 8 jetons sur le plateau de gauche est égale à la masse totale des 32 jetons sur le plateau de droite.

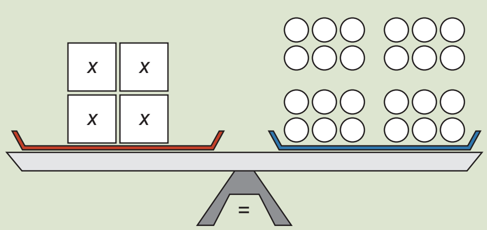
Pour résoudre l'équation, on peut d'abord retirer 8 jetons de chaque plateau, ce qui ne modifie pas l'équilibre de la balance.



Cette opération revient à soustraire 8 de chaque membre de l'équation :

$$4x + 8 - 8 = 32 - 8$$
$$4x = 24.$$

On peut ensuite diviser les 24 jetons qui restent sur le plateau de droite en 4 groupes égaux, ce qui permet d'établir la correspondance entre un groupe de 6 jetons et un cube (x).



Cette opération revient à diviser chaque membre de l'équation par 4 :

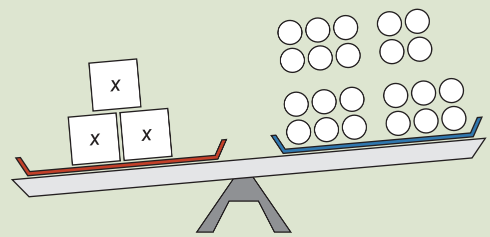
$$\frac{4x}{4} = \frac{24}{4}$$

$$x = 6.$$

Donc, la solution de l'équation $4x + 8 = 32$ est 6.

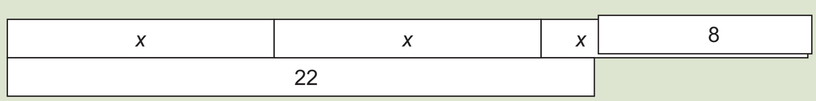
Note : On aurait pu choisir de remplacer les 24 jetons par un cube sur lequel le nombre 24 est inscrit.

Il est difficile d'utiliser le modèle de la balance à plateaux pour résoudre une équation comportant une soustraction. Par exemple, si l'on tente de résoudre l'équation $3x - 8 = 22$ avec ce modèle et que l'on place 3 cubes ($3x$) sur un plateau et 22 jetons sur l'autre plateau, il faudrait nécessairement montrer la balance en déséquilibre comme illustré ci-contre.



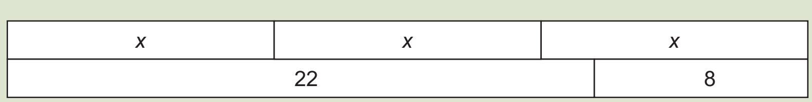
Pour pouvoir montrer la balance en équilibre, il faudrait réussir à montrer que l'on a enlevé 8 jetons du plateau contenant les 3 cubes ($3x - 8$), ce qui est plutôt difficile.

Un modèle autre que celui de la balance à plateaux s'avère plus utile pour représenter de telles équations. Il s'agit du modèle de rectangles superposés illustré ci-dessous.

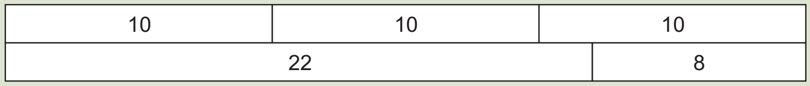


Dans la rangée du haut, on a 3 rectangles d'une longueur de x unités, desquels on retire 1 rectangle d'une longueur de 8 unités. Dans la rangée du bas, on a 1 rectangle d'une longueur de 22 unités. Ce modèle représente l'équation $3x - 8 = 22$, puisque la longueur totale des rectangles dans la rangée du haut après le retrait du rectangle de 8 unités de longueur est égale à la longueur du rectangle dans la rangée du bas.

Pour résoudre l'équation à l'aide de ce modèle, on peut d'abord ajouter 1 rectangle d'une longueur de 8 unités à chaque rangée, ce qui nous donne 3 rectangles d'une longueur totale de $3x$ unités dans la rangée du haut et 2 rectangles d'une longueur totale de 30 unités (22 + 8) dans la rangée du bas.

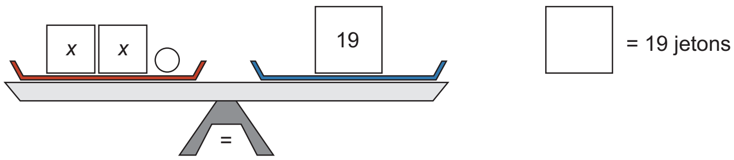


On peut alors conclure que la longueur de chacun des 3 rectangles dans la rangée du haut est égale à 10 unités. Donc, $x = 10$.

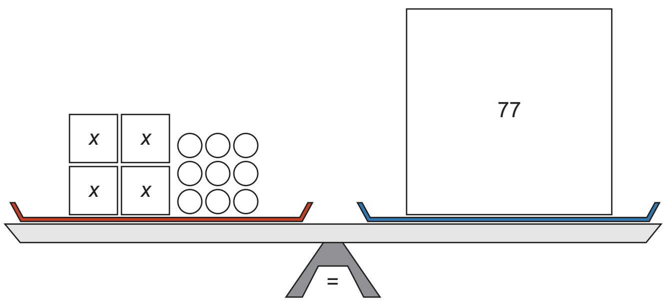


1. Quelle équation chaque modèle représente-t-il?

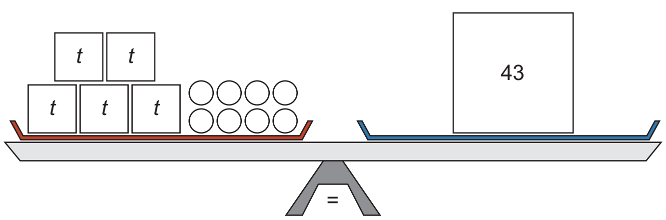
a)



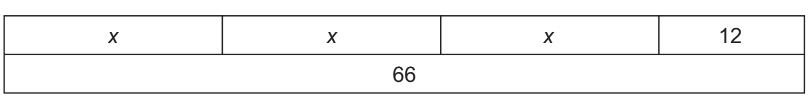
b)



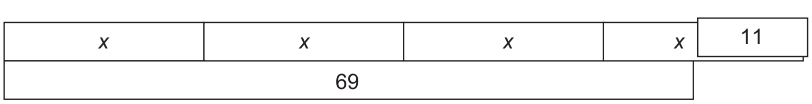
c)



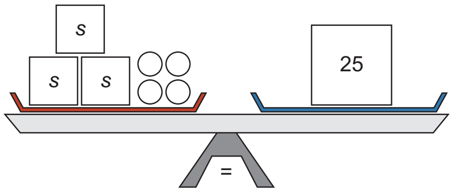
d)



e)



2. Tu cherches à résoudre l'équation représentée à l'aide du modèle suivant.



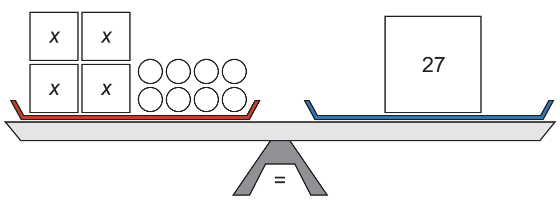
a) Explique pourquoi la première opération à effectuer est d'enlever 4 jetons de chaque plateau de la balance?

b) Quelle équation obtiens-tu après avoir effectué cette opération?

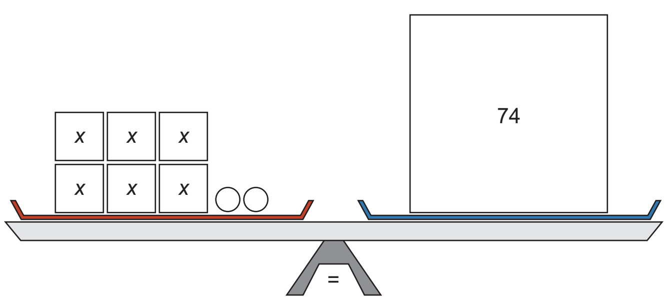
c) Quelle est alors la valeur de *s*?

3. Quelle est la première opération à effectuer pour résoudre l'équation représentée par chacun des modèles suivants?

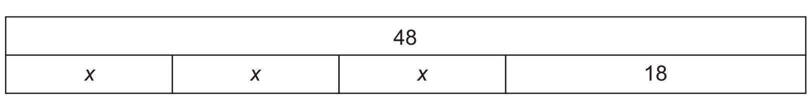
a)



b)

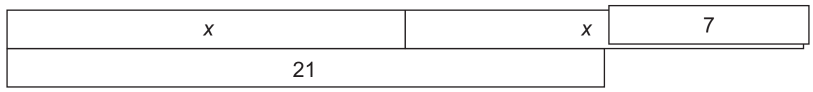


c)



4. Crée trois équations qui peuvent être résolues à l'aide du modèle de la balance à plateaux, sachant que la première opération consiste à ajouter 8 jetons sur chaque plateau et que la deuxième opération consiste à séparer les jetons du plateau de droite en 6 groupes égaux.

5. Tu cherches à résoudre l'équation $2x - 7 = 21$ à l'aide du modèle suivant.



a) Quelle est la première opération à effectuer pour résoudre cette équation?

b) Quelle équation obtiens-tu après avoir effectué cette opération?

c) Quelle est alors la valeur de x?

6. Pour chacune des équations suivantes, fais une esquisse d'un modèle que tu pourrais utiliser pour la résoudre. Résous ensuite chaque équation.

a) $7k + 9 = 72$

b) $4t - 18 = 46$

c) $300 - 9j = 192$

d) $57 = 6m + 3$

e) $5k - 88 = 112$

f) $36 + 2k = 12 + 8k$

7. a) Crée une équation comportant l'inconnue k et dont la solution est -2.

b) Pourquoi est-il inapproprié d'utiliser le modèle de la balance à plateaux ou le modèle des rectangles superposés pour résoudre cette équation?

c) Explique comment on peut résoudre l'équation par inspection.

Résolution d'équations par la méthode algébrique

Question ouverte

$6s + 20 = 68$ et

$6s = 68 - 20$ sont des équations équivalentes.

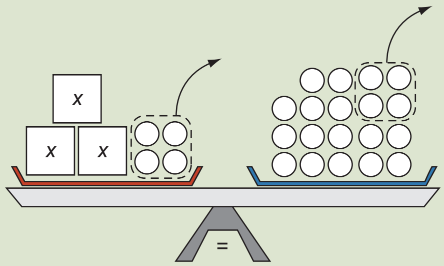
- Explique en quoi elles transmettent toutes les deux la même information.

- Pourquoi faut-il effectuer une soustraction suivie d'une division pour résoudre l'équation $6s + 20 = 68$?

- Pour chacune des situations suivantes, crée au moins une équation qui pourrait être résolue en effectuant les opérations données, puis résous chaque équation créée :
  - additionner et ensuite diviser;
  - soustraire seulement;
  - diviser seulement;
  - soustraire deux fois;
  - diviser et ensuite soustraire;
  - diviser et ensuite additionner;
  - additionner et ensuite multiplier.

Fiche de réflexion

Si une équation telle que $3x + 4 = 19$ était modélisée à l'aide d'une balance à plateaux, on pourrait retirer 4 jetons de chaque plateau pour obtenir une équation équivalente simplifiée.



On remarque en fait que les équations $3x + 4 = 19$ et $3x = 19 – 4$ sont équivalentes.

Puisqu'il faut ajouter 4 à $3x$ pour obtenir 19, alors si l'on n'ajoute pas ce 4, la valeur de $3x$ doit être 4 de moins que 19.

On a donc obtenu une équation simplifiée en effectuant une **opération inverse** : la soustraction est l'opération inverse de l'addition.

Note : On dit aussi que l'addition est « réparée » par la soustraction.

Une fois que l'on sait que $3x = 15$, on se rend compte que l'on multiplie x par 3 pour obtenir 15. Ainsi, si l'on divise les deux membres de l'équation par 3, c'est-à-dire que l'on effectue l'opération inverse de la multiplication, on peut alors déterminer que x est égal à $15 \div 3$ ou 5.

Effectuer des opérations inverses est exactement ce que l'on faisait quand on résolvait des équations en utilisant le modèle de la balance à plateaux ou le modèle de rectangles superposés.

Il faut se rappeler que l'addition et la soustraction sont des opérations inverses, et que la multiplication et la division sont aussi des opérations inverses.

Se souvenir de la priorité des opérations peut aussi être utile. Par exemple, pour résoudre l'équation $6t – 8 = 52$ par essais systématiques, on doit d'abord multiplier la valeur donnée à t par 6, puis soustraire 8 pour voir si l'on obtient un résultat de 52. Pour résoudre l'équation à l'aide des opérations inverses, il est logique de procéder dans l'ordre inverse. Autrement dit, on additionne d'abord 8 à chaque membre de l'équation, puis on divise chaque membre par 6. Il est toutefois possible de diviser d'abord tous les termes par 6 et d'effectuer ensuite une addition. La première équation équivalente serait alors : $t - \frac{8}{6} = \frac{52}{6}$.

Note : La méthode de résolution d'une équation qui consiste à utiliser successivement des opérations inverses pour isoler l'inconnue est communément appelée la **méthode algébrique**.

1. Pour résoudre laquelle ou lesquelles des équations suivantes choisirais-tu d’utiliser l’addition comme première opération? Explique pourquoi.

a) $3x - 9 = 21$

b) $62 = 5x + 22$

c) $120 - 9t = 18$

2. Pour chacune des équations suivantes, indique la première opération que tu effectuerais pour la résoudre algébriquement. Explique pourquoi.

a) $7x + 8 = 71$

b) $9s - 18 = 63$

c) $120 - 8s = 48$

d) $52 + 9t = 151$

e) $73 = 115 - 3m$

3. Pour résoudre algébriquement une équation comportant le terme $8x$, la première étape consiste à effectuer une soustraction.

a) Crée trois équations différentes qui correspondent à cette situation.

b) Quelle serait la deuxième étape? Explique pourquoi.

4. Pour résoudre algébriquement une équation, on effectue d'abord une addition, puis on divise par 3.

Crée trois équations différentes qui correspondent à cette situation.

5. a) Pourquoi faut-il une seule opération pour résoudre l'équation $4x = 20$, mais deux opérations pour résoudre l'équation $4x + 9 = 29$?

b) Combien d'opérations faut-il pour résoudre algébriquement l'équation $x - 8 = 12$? Indique lesquelles.

c) Crée quatre nouvelles équations qui peuvent être résolues algébriquement à l'aide d'une seule opération.

6. Résous algébriquement chacune des équations suivantes.

a) $11m + 23 = 67$

b) $12t - 182 = 58$

c) $100 - 4k = 32$

d) $215 = 8c + 119$

e) $46 = 5k - 59$

f) $24 + 6m = 8m + 8$

7. Afin de résoudre algébriquement l'équation $4x + 20 = 56$, Kyla propose de soustraire d'abord 20 de chaque membre de l'équation alors que Éric propose de diviser d'abord chaque terme de l'équation par 4. Laquelle des propositions est appropriée? Pourquoi?

Modification d’équations et de formules

Question ouverte

Les formules, et aussi parfois les équations, décrivent une relation entre différentes variables.

Voici quelques exemples :

- L’équation $S = 15h$ décrit la relation entre le salaire total (S) et le nombre d’heures de travail (h) au taux horaire de 15 $.
- La formule $A = b \times h$ décrit la relation entre l’aire (A) d’un rectangle, sa base (b) et sa hauteur (h).
- L’équation $2p + 5b = 100$ décrit la relation entre un nombre de pièces (p) de 2 $ et un nombre de billets (b) de 5 $ qui regroupés, représentent une valeur totale de 100 $.

Dans une équation ou dans une formule, si l’on connaît la valeur de l’une des deux variables, on peut déterminer la valeur de l’autre.

Dans le cas de la première équation, si l’on connaît le nombre h d’heures de travail, on peut déterminer le salaire gagné (S) et inversement, si l’on connaît le salaire gagné, on peut déterminer le nombre d’heures de travail.

Dans le cas de la deuxième équation, si l’on connaît les mesures de la base (b) et de la hauteur (h) du rectangle, on peut déterminer son aire (A) ou, si l’on connaît l’aire et la mesure de la base, on peut déterminer la mesure de la hauteur.

Dans le cas de la troisième équation, si l’on connaît le nombre de pièces (p) de 2 $, on peut déterminer le nombre de billets (b) de 5 $ qu’il faut pour obtenir un montant total de 100 $, et vice versa.

- En tenant compte des conditions ci-dessous, présente cinq situations qui décrivent une relation entre différentes variables et représente-les par une formule ou une équation :
  - quelques-unes des variables dans tes formules ou tes équations ont un coefficient autre que 1;
  - les équations et les formules font appel à différentes opérations;
  - les situations, les équations ou les formules utilisées sont différentes de celles présentées dans les exemples ci-dessus.

- Pour chacune des cinq formules ou équations créées, isole chacune des variables afin de les exprimer en fonction de l’autre ou des autres variables.

Fiche de réflexion

Les équations décrivent parfois une relation entre deux variables. Par exemple, l'équation $y = x + 2$ indique que la variable y vaut 2 de plus que la variable x, et ce, peu importe la valeur de x. Ainsi, si l'on connaît une valeur quelconque de x, on peut déterminer la valeur correspondante de y. Par exemple, si $x = 8$, alors $y = 10$.

Si l'on connaît plusieurs valeurs de y pour lesquelles on souhaite déterminer les valeurs correspondantes de x, il peut être utile de commencer par isoler la variable x dans l'équation en ayant recours aux opérations inverses :

$y = x + 2$	Soustraire 2 de chaque membre de l'équation.
$y - 2 = x$	On constate maintenant que la variable x vaut toujours 2 de moins que la variable y.

Par exemple, si $y = 6$, alors $x = 4$.

Il est aussi parfois souhaitable d'utiliser cette stratégie dans des situations impliquant des formules. Par exemple, la formule pour déterminer l'aire d'un parallélogramme est $A = bh$, c'est-à-dire que l'aire (A) du parallélogramme est égale au produit de la base (b) et de la hauteur (h). Alors, si $b = 5$ cm et $h = 3$ cm, on peut utiliser la formule pour déterminer que $A = 15$ cm^2.

Mais si l'on connaît les mesures de l'aire et de la base du parallélogramme et que l'on cherche à déterminer la mesure de la hauteur, on peut choisir de modifier la formule en isolant la variable h. Il suffit de diviser chaque membre de l'équation par b. On obtient alors la formule $A \div b = h$, c'est-à-dire que la mesure de la hauteur est égale au quotient de la mesure de l'aire et de la mesure de la base. Par exemple, si $A = 15$ cm^2 et $b = 5$ cm, alors $h = 3$ cm.

La formule pour déterminer l'aire d'un triangle est $A = bh \div 2$. Dans ce cas, isoler la variable h requiert deux opérations.

$A = bh \div 2$	Multiplier les deux membres de l'équation par 2 pour annuler la division par 2.
$2A = bh$	Diviser les deux membres de l'équation par b pour annuler la multiplication.
$2A \div b = h$	

Si l'on connaît les valeurs de A et de b, on peut alors déterminer la valeur correspondante de h en multipliant la valeur de A par 2 et en divisant le résultat par la valeur de b.

1. Tu dois isoler la variable x dans chacune des équations suivantes. Pour laquelle ou lesquelles des équations choisirais-tu d'utiliser l'addition comme première opération? Pourquoi?

a) $y = 4x - 8$

b) $y = 3x + 12$

c) $6x - 12 = y$

d) $500 + 2x = y$

2. Pour chacune des équations suivantes, indique la première opération que tu effectuerais pour exprimer la variable m en fonction de la variable p.

a) $p = 6m - 8$

b) $p = 15 - 3m$

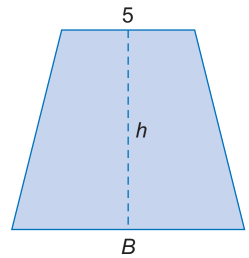
c) $p = 3m - 2$

d) $2p = 5 - 4m$

e) $10p = 18 + 3m$

3. L'opération requise pour isoler la variable h dans la formule $A = bh$ est-elle différente de celle requise pour isoler la variable b? Explique ta réponse.

4. La formule pour déterminer l'aire du trapèze ci-dessous est $A = \left(\frac{B + 5}{2}\right)h$.



Les opérations requises pour isoler la variable *h* dans cette formule sont-elles différentes de celles requises pour isoler la variable *B*? Explique ta réponse.

5. Isole la variable *x* dans chacune des équations suivantes.

a) $y = x - 9$

b) $y = 2x + 12$

c) $y = 4x - 7$

d) $4y = 8x + 12$

e) $2y = 4(x + 5)$

f) $3y + 9x = 54$

6. La formule pour déterminer le périmètre d'un rectangle est $P = 2b + 2h$.

a) Sachant que $P = 20$ cm et que $b = 4$ cm, laquelle des méthodes suivantes choisirais-tu pour déterminer la valeur de *h*?

Méthode A : Écrire $20 = 2 \times 4 + 2h$, puis résoudre l'équation $20 = 8 + 2h$.

Méthode B : Exprimer la variable *h* en fonction des variables *P* et *b*, soit $h = (P - 2b) \div 2$, puis remplacer *P* et *b* par leur valeur respective pour obtenir $h = (20 - 2 \times 4) \div 2$.

b) Si le périmètre du rectangle mesure 20 cm et que tu as plusieurs valeurs différentes de *b* pour lesquelles tu dois déterminer la valeur correspondante de *h*, quelle méthode choisirais-tu?

