RÉDUCTIONDESÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 5 : Puissances et racines carrées

Guide de l'élève

Module 5

Puissances et racines carrées

Évaluation diagnostique 3

Carrés parfaits et racines carrées 6

Puissances 11

Théorème de Pythagore 16

Évaluation diagnostique

1. Un carré parfait est un nombre qui est le carré d'un nombre naturel. Énumère 3 carrés parfaits entre 1 000 et 2 000.

2. Estime la valeur positive des racines carrées suivantes. N'UTILISE PAS de calculatrice.

a) $\sqrt{250}$ **b)** $\sqrt{88}$ **c)** $\sqrt{622}$

3. Démontre à l'aide d'un dessin que $\sqrt{16} = 4$.

4. Comment peut-on démontrer que $\sqrt{250\,000}$ vaut nécessairement 100 fois plus que $\sqrt{25}$?

5. Laquelle des expressions suivantes est équivalente à 5^3?

A : $5 \times 5 \times 5$

B : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

C : $5 \times 3 \times 5 \times 3$

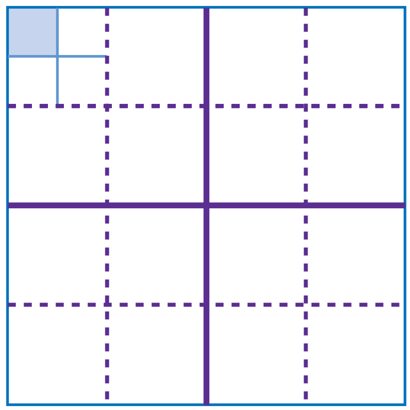
D : 5×3

6. Évalue les puissances suivantes.

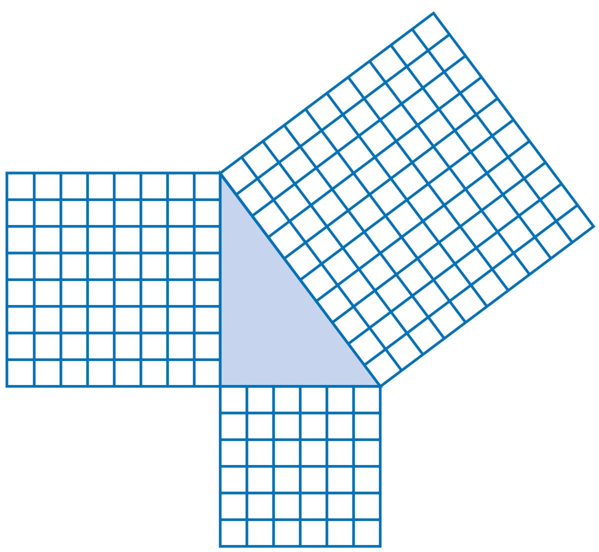
a) 3^4 **b)** 4^3 c) 10^3 **d)** $(-2)^5$ **e)** $(0,2)^2$

7. Sans déterminer de valeurs exactes, comment peut-on expliquer que 3^5 est vraisemblablement supérieur à 5^3?

8. En utilisant les 4 droites pointillées et les 2 droites plus foncées comme repères, représente par une puissance le nombre de petits carrés ombrés que l'on peut insérer dans le plus grand carré. Explique ton raisonnement.



9. Explique pourquoi les carrés tracés sur les côtés du triangle ci-dessous permettent de dire qu'il s'agit d'un triangle rectangle. N'UTILISE PAS de rapporteur.



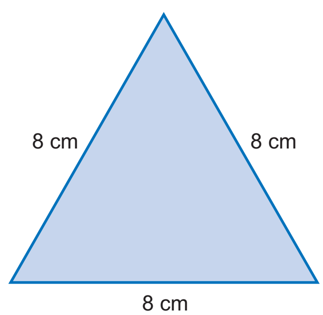
10. Les mesures suivantes correspondent à la longueur des deux côtés les plus courts d'un triangle rectangle. Sans utiliser une règle, détermine la longueur du côté le plus long.

a) 4 cm et 5 cm **b)** 5 cm et 12 cm

11. Le côté le plus long d'un triangle rectangle mesure 10 cm. On te donne la longueur de l'un des deux autres côtés. Sans utiliser une règle, détermine la longueur du troisième côté.

a) 3 cm **b)** 5 cm

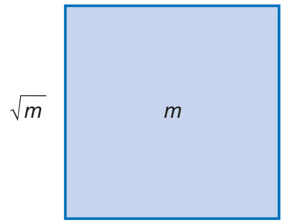
12. Sans utiliser une règle, détermine la hauteur du triangle suivant.



Carrés parfaits et racines carrées

Question ouverte

Si l'aire d'un carré est égale à m unités carrées, la longueur de chacun de ses côtés correspond à la **racine carrée** de m. Cela s'écrit $\sqrt{m}$. Si $\sqrt{m}$ correspond à un nombre naturel, alors m est un **carré parfait.**



- Choisis comme valeurs possibles de l'aire d'un carré, huit nombres entiers compris entre 100 et 300, en tenant compte des conditions suivantes :
  - trois des nombres sont des carrés parfaits, et les cinq autres n'en sont pas;
  - l'un des nombres est le double de l'un des autres nombres;
  - au moins un des nombres a plusieurs facteurs, et au moins un des nombres en a peu.

- Choisis comme valeurs possibles de l'aire d'un carré, quatre nombres compris entre 0 et 1, en tenant compte des conditions suivantes :
  - deux des nombres sont proches de 0;
  - les deux autres nombres sont proches de 1.

- Détermine la racine carrée des trois nombres entiers qui sont des carrés parfaits et estime la racine carrée des autres nombres. Justifie tes estimations.

Fiche de réflexion

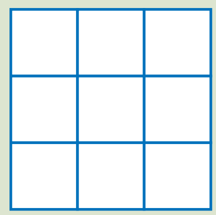
Un **carré parfait** est le produit de deux nombres naturels identiques.

Par exemple, 16 est un carré parfait puisque 4 × 4 = 16. On dit que **4 au carré** est égal à 16.

Quelques exemples de carrés parfaits :

1 1 × 1
3
4 2 × 2
5
9 3 × 3
7
16 4 × 4
9
25 5 × 5
…

Il est possible de modéliser les carrés parfaits à l'aide de dispositions rectangulaires. Par exemple, 3 × 3 peut être représenté par la disposition rectangulaire suivante :

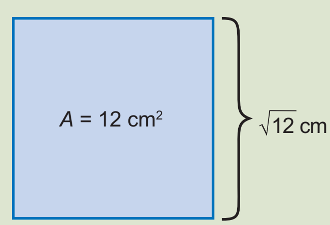


On constate que l'écart entre deux carrés parfaits successifs est croissant. Par exemple, il y a un écart de 3 entre 1 et 4, un écart de 5 entre 4 et 9, et un écart de 7 entre 9 et 16.

La **racine carrée** d'un nombre positif quelconque correspond au nombre qui, multiplié par lui-même, donne le nombre positif initial. Chaque nombre positif a deux racines carrées, une qui est positive et l'autre, son opposé, qui est négative. Par exemple, les racines carrées de 16 sont 4 et –4 puisque 4 × 4 = 16 et que (–4) × (–4) = 16. En mathématiques, le signe $\sqrt{}$ est utilisé pour désigner une racine carrée. Par exemple, la racine carrée de 16 s'écrit $\sqrt{16}$.

La racine carrée d'un nombre ne donne pas nécessairement un nombre entier. Par exemple, la valeur positive de $\sqrt{8}$ se situe entre 2 et 3, puisque 2 × 2 = 4, que 3 × 3 = 9 et que 8 se situe entre 4 et 9. Sa valeur négative, opposée à la valeur positive, se situe donc entre –2 et –3.

Si un nombre *A* quelconque correspond à l'aire d'un carré, on peut associer la racine carrée de ce nombre ($\sqrt{A}$) à la longueur de chacun des côtés du carré. Par exemple, on peut associer $\sqrt{12}$ à la longueur de chacun des côtés d'un carré dont l'aire est de 12 cm^2. La **valeur exacte** de la longueur des côtés est de $\sqrt{12}$ cm alors que la **valeur approximative** est de 3,5 cm.



Note : Dans un contexte géométrique où la racine carrée d'un nombre correspond, par exemple, à la longueur des côtés d'un carré, on ne retient que la racine carrée positive, puisque la longueur des côtés ne peut pas correspondre à une valeur négative.

- Pour estimer la racine carrée positive d'un nombre, on peut commencer par comparer ce nombre à des carrés parfaits que l'on connaît.

  Par exemple, en reconnaissant que 125 se situe entre 121 (11 × 11) et 144 (12 × 12), on peut dire que $\sqrt{125}$ se situe entre 11 et 12. On peut ensuite estimer que $\sqrt{125}$ est environ égale à 11,2 puisque 125 est plus près de 121 que de 144. En utilisant la touche $\sqrt{\ }$ d'une calculatrice, on peut déterminer la valeur de $\sqrt{125}$ avec plus d'exactitude (p. ex., $\sqrt{125}$ = 11,1803).

  Il est utile de connaître quelques carrés parfaits, comme ceux indiqués dans le tableau ci-contre.

- On peut s'appuyer sur le fait que 10 × 10 = 100 et que 100 × 100 = 10 000 pour estimer les racines carrées positives de nombres plus grands.
  Par exemple,
  puisque $\sqrt{15}$ est proche de 4,
  alors $\sqrt{1\ 500}$ est proche de 40
  et $\sqrt{150\ 000}$ est proche de 400.

Carré parfait	Racine carrée
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10
121	11
144	12
10 000	100
1 000 000	1 000

1. a) Énumère tous les carrés parfaits compris entre 200 et 300.

b) Comment sais-tu que tu les as tous énumérés?

2. Comment peux-tu reconnaître que 250 ne peut pas être un carré parfait?

3. a) Parmi ces puissances de 10, lesquelles sont des carrés parfaits? Justifie ta réponse.

100 1 000 10 000 100 000

b) Pourquoi ne sont-elles pas toutes des carrés parfaits?

4. a) Tu veux multiplier l'expression numérique $2 \times 2 \times 5 \times 3$ par un nombre pour que le résultat soit un carré parfait. Énumère trois nombres possibles et démontre que tu obtiens dans chaque cas un carré parfait.

b) Que constates-tu lorsque ces carrés parfaits sont exprimés comme le produit de leurs facteurs premiers?

c) Quel est le plus petit nombre par lequel tu pourrais multiplier l'expression $2 \times 2 \times 4 \times 5$ pour que le résultat soit un carré parfait? Justifie ta réponse.

5. Quelle est la longueur des côtés des trois jardins carrés dont l'aire est donnée ci-dessous? Comment le sais-tu?

a) 64 m^2 **b)** 144 m^2 **c)** 200 m^2

6. Tu sais que la racine carrée positive d'un nombre est plus près de 7 que de 8. Quel peut être ce nombre? Comment le sais-tu?

7. Estime la valeur positive des racines carrées suivantes sans utiliser la calculatrice. Explique ton raisonnement.

a) $\sqrt{30}$ **b)** $\sqrt{300}$ **c)** $\sqrt{3\,000}$

8. a) Quelle relation y a-t-il entre les réponses aux questions 7 a) et 7 c)?

b) Pourquoi cette relation était-elle prévisible?

9. Comment le fait de décomposer 57 600 en 64 × 36 × 25 peut-il t'aider à déterminer la racine carrée positive de ce nombre?

10. Combien de chiffres la racine carrée positive de chacun des nombres suivants peut-elle comprendre? Explique ton raisonnement.

a) un carré parfait à 3 chiffres

b) un carré parfait à 4 chiffres

11. Comment peut-on expliquer que la valeur positive de $\sqrt{\frac{1}{4}}$ soit supérieure à $\frac{1}{4}$?

12. Une relation entre un nombre et sa racine carrée est décrite dans chacun des problèmes ci-dessous. Détermine dans chaque cas quel est ce nombre.

a) Le nombre vaut 5 fois sa racine carrée.

b) Le nombre vaut $\frac{1}{3}$ de sa racine carrée.

c) Le nombre vaut 90 de plus que sa racine carrée.

d) Le nombre vaut $\frac{4}{25}$ de moins que sa racine carrée.

Puissances

Question ouverte

Il est possible de représenter une multiplication répétée de façon plus concise en utilisant une **puissance**.

Par exemple, 2^4 signifie $2 \times 2 \times 2 \times 2$, c'est-à-dire que 2 est multiplié par lui-même 4 fois. On peut donc parler de puissance, puisqu'il s'agit du produit d'un nombre par lui-même.

Le nombre 2 est la **base**, le nombre 4 est l'**exposant** et 2^4 est la **puissance**.

base → 2^4 ← exposant

- Énumère toutes les puissances que l'on peut obtenir en utilisant les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 à la fois comme base et comme exposant, et en utilisant les nombres 0,5 et –2 comme base seulement. Détermine ensuite la valeur de chacune de ces puissances.

- Quelles constatations peux-tu faire au sujet des puissances à partir de ces résultats?

Fiche de réflexion

La multiplication est une façon de représenter une addition répétée de façon plus concise. Par exemple, il est plus rapide d'écrire 4 × 5 que d'écrire 5 + 5 + 5 + 5.

Pour représenter une multiplication répétée de façon plus concise, on utilise une **puissance**. Par exemple, 2^4 signifie 2 × 2 × 2 × 2, c'est-à-dire que 2 est multiplié par lui-même 4 fois.

Le nombre 2 est la **base**, le nombre 4 est l'**exposant** et 2^4 est la **puissance**.

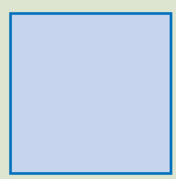
$$\text{base} \longrightarrow 2^4 \longleftarrow \text{exposant}$$

- Les puissances dont l'exposant est 2 ou 3 portent respectivement le nom de **carré** et de **cube**. Par exemple, la puissance 6^2 se lit communément *6 au carré* alors que la puissance 5^3 se lit communément *5 au cube*.

  Dans tous les autres cas, on utilise généralement des nombres ordinaux. Par exemple, 6^5 se lit *la cinquième puissance de 6* ou *6 exposant 5*.

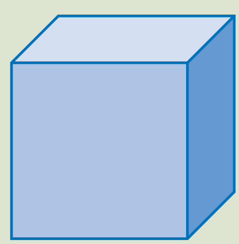
- On associe un carré (ou un nombre à la deuxième puissance) à l'aire d'un carré. Cela nous aide à comprendre pourquoi on utilise, par exemple, les unités cm^2 ou m^2 pour désigner une aire.

  Ce carré a une aire de 9 (3^2) cm^2.

  On associe un cube (ou un nombre à la troisième puissance) au volume d'un cube. Cela nous aide à comprendre pourquoi on utilise, par exemple, les unités cm^3 ou m^3 pour désigner un volume.

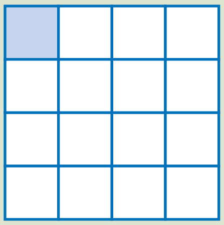
  Ce cube a un volume de 64 (4^3) cm^3.

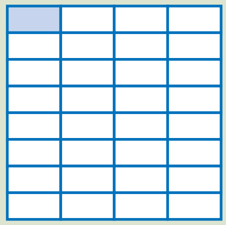
- Les puissances des nombres entiers augmentent rapidement. Par exemple,
  $3^4 = 81$, mais
  $3^5 = 243$ et
  $3^6 = 729$.

- Les puissances ayant comme base un nombre compris entre 0 et 1 diminuent au fur et à mesure que l'exposant augmente. Par exemple,

  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, mais $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.



$\frac{1}{16}$



$\frac{1}{32}$

- Les puissances de nombres négatifs peuvent avoir une valeur positive ou négative. Si l'exposant est un entier pair, la puissance a une valeur positive; s'il est impair, elle a une valeur négative.

  Par exemple $(-3)^3 = -27$, mais $(-3)^4 = +81$.

1. Écris chaque puissance sous forme d'une multiplication répétée.

a) 3^4 **b)** 3^6 **c)** 4^6

d) 2^{10} **e)** $(-3)^4$

2. Représente chaque puissance à l'aide d'un dessin.

a) 5^3 **b)** 8^2

3. Une grande boîte peut contenir 4 boîtes de taille moyenne.

Chacune des 4 boîtes de taille moyenne peut contenir 4 petites boîtes.

Chacune des 4 petites boîtes peut contenir 4 très petites boîtes.

Représente à l'aide d'une puissance, le nombre de très petites boîtes qui peuvent être contenues dans la grande boîte. Explique ton raisonnement.

4. Décris une situation (comme à la question 3) qui peut être représentée par la puissance 6^4.

5. La puissance $(-2)^{\square}$ a une valeur positive. Que peut valoir $\square$?

6. **a)** Place les puissances suivantes en ordre croissant.

$\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\quad\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad\left(\frac{1}{2}\right)^5$

b) Place les puissances suivantes en ordre croissant.

2^3 $\quad 2^4$ $\quad 2^2$ $\quad 2^5$

c) Que constates-tu en comparant les réponses aux questions a) et b)?

7. Une puissance, dont la base est 1 de moins que son exposant, a une valeur d'environ 1 000. Quelle est cette puissance?

8. Remplis les cases de sorte que les égalités soient vraies.

a) $\square^4 = 9^2$ **b)** $6^8 = 36^{\square}$ **c)** $25^3 = \square^6$

9. Indique dans chaque cas la puissance ayant la plus grande valeur. Comment le sais-tu?

a) 2^3 ou 2^5 **b)** 10^3 ou 9^3 **c)** 10^3 ou 100^2

10. Remplis les cases de sorte que les énoncés soient vrais.

a) $\square^3 < \square^2$

b) $\square^3$ vaut au moins 100 de plus que $\square^2$

c) $\square^3$ est inférieur à $\frac{1}{5}$ de $\square^2$

11. Explique pourquoi 20^5 est 400 fois plus grand que 20^3.

12. Écris chacune des expressions suivantes sous forme d'une seule puissance.

a) $3 \times 3 \times 5 \times 5$

b) $6 \times 6 \times 3 \times 3 \times 6 \times 3$

c) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

13. Pourquoi est-ce utile de représenter le produit de plusieurs facteurs à l'aide d'une puissance?

Théorème de Pythagore

Question ouverte

- Dessine 4 triangles rectangles et 3 triangles non rectangles. Dessine ensuite sur chacun des côtés de ces triangles, un carré dont la longueur des côtés est égale à la longueur du côté correspondant du triangle.

- Pour chaque triangle, compare l'aire totale des deux plus petits carrés avec l'aire du carré le plus grand. Que constates-tu?

- Si tu connais la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle, comment peux-tu utiliser tes constatations pour déterminer la longueur du troisième côté?

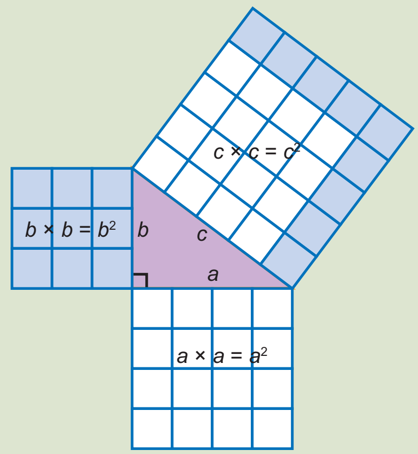
Fiche de réflexion

Les triangles rectangles possèdent une propriété particulière.

Lorsque l'on connaît la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle et que l'on sait de quels côtés il s'agit, on peut facilement déterminer la longueur du troisième côté. Ceci tient du fait que l'aire totale des deux carrés que l'on peut former à partir des deux côtés les plus courts d'un triangle rectangle est égale à l'aire du carré que l'on peut former à partir du côté le plus long.

Note : Dans un triangle rectangle, le côté le plus long, appelé **hypoténuse**, est le côté opposé à l'angle droit.

Puisque l'aire d'un carré est égale au carré de son côté, on peut représenter la relation entre les aires des carrés formés à partir des côtés d'un triangle rectangle à l'aide de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$, où a et b représentent la longueur des deux côtés les plus courts et c représente la longueur de l'hypoténuse.



Cette relation s'appelle le **théorème de Pythagore**. Elle ne s'applique pas à tous les triangles.

Si l'on connaît la longueur de deux des côtés d'un triangle rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la longueur du troisième côté. Par exemple, si l'on sait que l'hypoténuse mesure 12 cm et que l'un des deux autres côtés mesure 4 cm, alors on obtient :

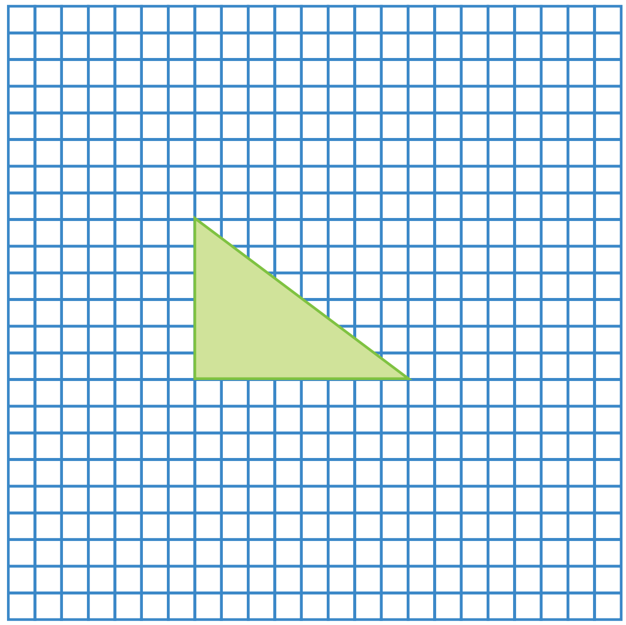
$a^2 = 12^2 - 4^2 = 128$; on a donc $a = \sqrt{128}$, soit environ 11,3 cm.

- Puisque cette relation n'est valable que pour les triangles rectangles, on peut s'en servir pour déterminer si un triangle est rectangle ou pas sans avoir à le dessiner.

  Par exemple, si les côtés d'un triangle mesurent respectivement 9, 12 et 15 unités; il s'agit d'un triangle rectangle, puisque $9^2 + 12^2 = 225 = 15^2$.

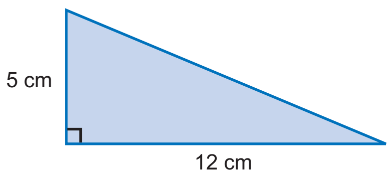
  Si les côtés d'un triangle mesurent respectivement 5, 7, et 9 unités, ce n'est pas un triangle rectangle, puisque $5^2 + 7^2 = 74$ alors que $9^2 = 81$.

1. Sur chaque côté du triangle rectangle ci-dessous, dessine un carré dont la longueur des côtés est égale à la longueur du côté sur lequel il est dessiné. Explique de quelle façon ceci illustre le théorème de Pythagore.

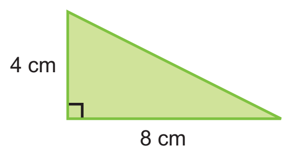


2. Détermine la longueur du troisième côté de chacun des triangles rectangles suivants.

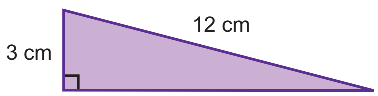
a)



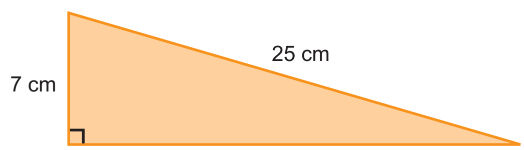
b)



c)



d)



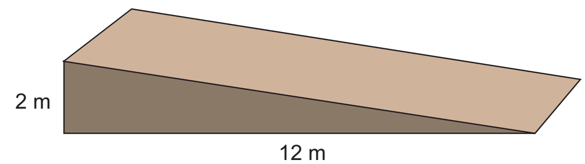
3. Les mesures suivantes représentent les longueurs des côtés d'un triangle. Détermine dans chaque cas s'il s'agit ou non d'un triangle rectangle. Explique ton raisonnement pour ta réponse à la question c).

a) 5 cm, 8 cm, 11 cm

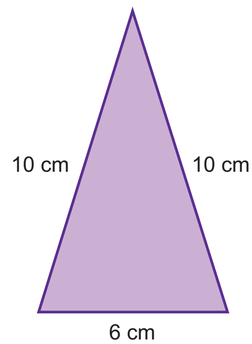
b) 24 cm, 32 cm, 40 cm

c) 10 cm, 24 cm, 26 cm

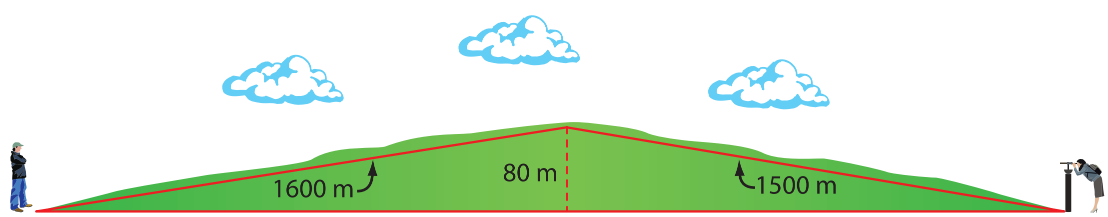
4. Une rampe a une base de 12 m et une hauteur de 2 m. Détermine la longueur de la rampe.



5. Sans utiliser une règle, détermine la hauteur du triangle suivant.



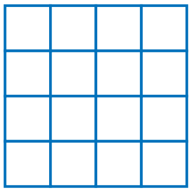
6. Deux personnes sont situées de part et d'autre d'une colline de 80 m de hauteur comme illustré ci-dessous. Détermine la distance horizontale entre les deux personnes.



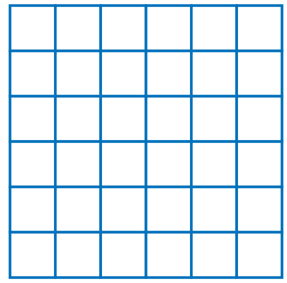
7. Dessine trois rectangles différents ayant chacun un périmètre de 100 cm. Détermine ensuite la longueur des diagonales de chaque rectangle.

8. Détermine la longueur des diagonales de chaque carré. Divise la longueur de chaque diagonale par la longueur du côté du carré correspondant. Que constates-tu?

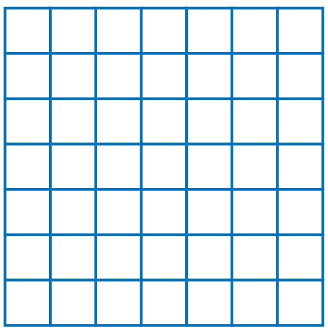
a)



b)



c)



9. Trois triangles rectangles différents ont une hypoténuse de 10 cm. Détermine les longueurs approximatives possibles des deux autres côtés de chacun de ces triangles.

10. Existe-t-il un seul triangle rectangle dont un côté mesure 3 cm et un autre mesure 5 cm? Justifie ta réponse.

11. Un triangle est presque rectangle, mais pas tout à fait. Quelles peuvent être les longueurs de ses côtés? Comment le sais-tu?