RÉDUCTIONDESÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 4 : Raisonnement proportionnel

Guide de l'élève

Module 4

Raisonnement proportionnel

Évaluation diagnostique 3

Description et représentation de rapports, de taux et de pourcentages 6

Formes équivalentes de rapports, de taux et de pourcentages 12

Résolution de problèmes comportant des rapports et des taux 18

Résolution de problèmes comportant des pourcentages 24

Annexe

Roulette 32

Évaluation diagnostique

1. Une équipe d'un projet technique est composée de 8 garçons et de 3 filles.

a) Écris le rapport entre le nombre de filles et le nombre de garçons sous la forme $\square$: $\square$.

b) Écris le rapport entre le nombre de garçons et le nombre total de personnes dans l'équipe.

c) Une autre équipe regroupe aussi 11 élèves, mais le rapport entre le nombre de filles et le nombre de garçons qui composent l'équipe est plus élevé. Quel pourrait être ce rapport?

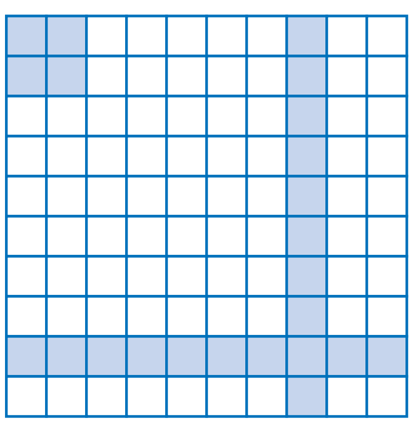
2. Le rapport entre la taille de Vana et celle de Mélissa est de 5 : 4.

a) Laquelle des deux filles est la plus grande?

b) Est-elle deux fois plus grande? Comment le sais-tu?

3. Valène court à une vitesse de 0,18 km/min. Explique ce que cela signifie.

4. a) Quel pourcentage de la grille est ombré?



b) Quel pourcentage n'est pas ombré?

5. Indique si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux, ou s'il est vraisemblable ou invraisemblable.

a) 8 % d'un ensemble quelconque représente une grande partie de cet ensemble.

b) 80 % d'un ensemble quelconque représente beaucoup plus que la moitié de cet ensemble.

c) En temps normal, 35 % des personnes présentes dans une école élémentaire au cours d'une journée scolaire sont des adultes.

6. Justifie ta réponse à la question 5 c).

7. Remplis les cases de sorte que les rapports soient équivalents.

a) 2 : 7 = $\square$: 14 **b)** 5 : 10 = $\square$: 8 **c)** 12 : $\square$ = 3 : 5

8. Si ton cœur bat 144 fois en 2 minutes, combien de fois battra-t-il en 5 minutes?

9. Donne une fraction équivalente à chacun des pourcentages suivants.

a) 40 % **b)** 112 % **c)** 3,5 %

10. Si 3 savons coûtent 2,61 $, combien coûtent :

a) 6 savons?

b) 8 savons?

11. Une voiture parcourt 78 kilomètres en 45 minutes. À cette vitesse, quelle distance parcourra-t-elle en 1 heure?

12. Une boîte de 2,6 litres de jus coûte 3,00 $. Quel est le coût équivalent pour 1 litre de ce jus?

13. Le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles dans une classe est de 7 : 3. Quel est le pourcentage de filles dans la classe?

14. Un t-shirt étiqueté à 12,99 $ est réduit de 30 %. Combien le t-shirt soldé coûte-t-il (avant l'application des taxes)?

15. Indique si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux.

a) 40 % de 120 est égal à environ 30.

b) 20 % de 83 est égal à environ 16.

c) 11 % de 198 est égal à environ 20.

16. Justifie ta réponse à la question 15 a).

17. Léa a dépensé 25 $ en puisant dans ses économies. Il lui reste 60 % de son épargne. Combien d'argent lui reste-t-il?

Description et représentation de rapports, de taux et de pourcentages

Question ouverte

Comme le démontrent les exemples suivants, les rapports, les taux et les pourcentages représentent tous des comparaisons.

Rapport : Une recette nécessite 3 cuillérées à table de farine pour 1 cuillérée à table de sucre.

Taux : Un peintre peut peindre 2 pièces en 7 heures.

Pourcentage : 52 ¢ représentent 52 % de 1 $.

- En respectant la politique de ton école relative à la sécurité sur Internet, effectue une recherche dans les sites de langue française et relève trois exemples de chaque type de comparaison (rapport, taux et pourcentage), en lien avec l'un ou l'autre des thèmes suivants :
  - questions environnementales;
  - sports;
  - arts.
- Pour chaque exemple, indique quels sont les deux éléments comparés et inscris l'adresse URL du site.

Fiche de réflexion

Les énoncés suivants décrivent des comparaisons faites à l'aide d'un rapport, d'un taux ou d'un pourcentage.

- L'énoncé 3 filles pour 4 garçons représente un **rapport**; il compare le nombre de filles au nombre de garçons.

  Ce rapport peut s'écrire sous la forme 3 : 4. Les **termes** du rapport sont 3 et 4, 3 étant le premier terme et 4 le second terme. Il est important de savoir ce que représente chaque terme. En l'occurrence, le premier terme est lié au nombre de filles et le second est lié au nombre de garçons.

  Ainsi, si une classe compte 12 filles (F) et 16 garçons (G), on peut disposer les lettres F et G de manière à montrer qu'il y a 3 filles pour 4 garçons.

F F F	G G G G	(3 filles pour 4 garçons)
F F F	G G G G	(3 filles pour 4 garçons)
F F F	G G G G	(3 filles pour 4 garçons)
F F F	G G G G	(3 filles pour 4 garçons)
12 filles	16 garçons	

  Remarque que le rapport entre le nombre de filles et le nombre total d'élèves dans la classe n'est pas de 3 : 4, mais de 3 : 7 puisque dans chaque petit groupe de 7 élèves, il y a 3 filles. On pourrait également dire que $\frac{3}{7}$ des élèves de la classe sont des filles.

- L'énoncé *3 boîtes pour 4 $* représente un **taux**; il compare le nombre de boîtes à un prix en dollars.

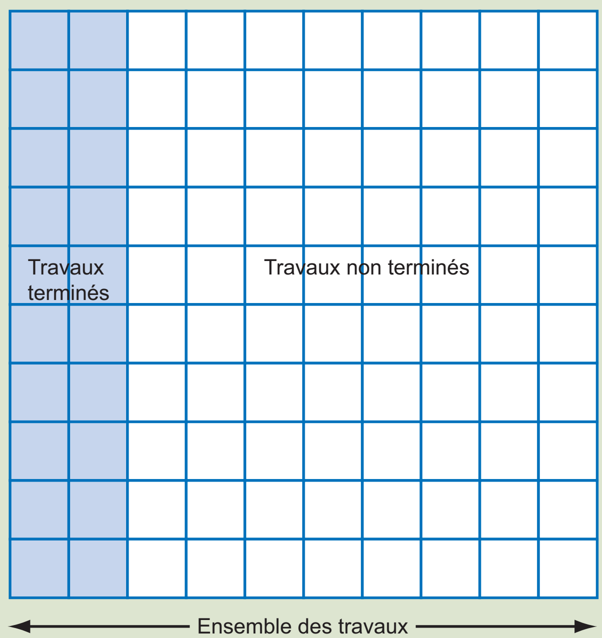
  Par exemple, à l'épicerie, deux marques de jus d'orange sont vendues dans des contenants de 500 ml. La première marque de jus coûte 4 $ pour 3 contenants et la deuxième coûte 5 $ pour 4 contenants. On peut déterminer quel achat est le plus avantageux en comparant les prix pour 1 contenant de jus de chaque marque, ou encore en comparant la quantité de jus de chaque marque que l'on peut se procurer avec 1 $.

  Un taux est un rapport qui comporte généralement des quantités de nature différente. Dans l'exemple précédent, les quantités comparées représentent des contenants et des dollars. D'autres exemples de taux sont :

  – la vitesse (p. ex., en kilomètres par heure ou en mètres par seconde);
  – l'échelle d'une carte (p. ex., 1 cm sur la carte correspond à une distance réelle de 12 km).

- L'énoncé *20 % des travaux sont terminés* représente un **pourcentage**; il compare la partie des travaux qui sont terminés à l'ensemble des travaux à effectuer.

  Un pourcentage est un rapport dont le second terme est 100. On pourrait donc écrire 20 % sous la forme du rapport 20 : 100. Une grille de 100 cases est un bon modèle pour représenter un pourcentage. Par exemple, la partie ombrée de la grille ci-dessous représente 20 % (20 carrés sur 100).



  On peut aussi utiliser ce modèle pour comparer la partie des travaux qui sont terminés à la partie des travaux qui ne sont pas terminés et démontrer que cette comparaison peut être représentée par le rapport 20 : 80.

1. En mélangeant 1 tasse d'eau à différentes quantités de jus de canneberge, on obtient des boissons dont le goût de canneberge est plus ou moins prononcé. Parmi ces rapports entre le nombre de tasses d'eau et le nombre de tasses de jus de canneberge, lequel correspond à la boisson qui a le goût de canneberge le moins prononcé? Justifie ta réponse.

1 : 3   1 : 4   1 : 2,5   1 : 3,5

2. Yanick a construit un modèle d'un oiseau. Le rapport entre les dimensions de son modèle et les dimensions réelles de l'oiseau est de 3 : 2.

a) Le modèle de l'oiseau est-il plus grand ou plus petit que l'oiseau même? Justifie ta réponse.

b) Si une griffe de l'oiseau mesure en réalité 2 cm, combien mesure-t-elle sur le modèle?

c) Si l'on représente cette dernière situation à l'aide du rapport 2 : 3, en quoi ce rapport est-il différent du rapport 3 : 2 donné précédemment?

3. Le rapport entre la longueur et la largeur d'un rectangle est de 12 : 4.

a) Pourrait-on dire que ce rectangle est presque un carré? Justifie ta réponse.

b) Quel est le rapport entre la longueur et le périmètre du rectangle?

c) Pourquoi est-il possible que la longueur et la largeur du rectangle mesurent respectivement 12 cm et 4 cm, ou 12 m et 4 m, mais non 12 m et 4 cm?

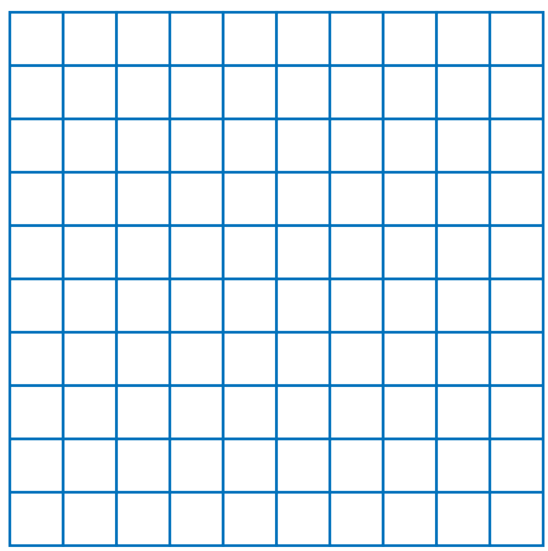
4. L'une des méthodes utilisées pour évaluer la condition physique d'une personne consiste à comparer la masse grasse de son corps à sa masse totale. Un rapport plus petit est associé à une meilleure condition physique. Si le rapport entre la masse grasse et la masse totale d'une personne est de 3 : 10, alors qu'il est de 3,5 : 10 pour une autre personne, laquelle des deux est théoriquement en meilleure condition physique? Justifie ta réponse.

Description et représentation de rapports, de taux et de pourcentages (*Suite*)

5. Un abonnement de 4 mois à un centre sportif coûte 180 $. Représente cette situation à l'aide de deux taux différents et indique les éléments qui sont comparés dans chaque cas.

6. On utilise souvent le mot « par » pour exprimer un taux. Par exemple, la vitesse d'une voiture représente un taux qui est généralement exprimé en *kilomètres par heure*. On utilise souvent la barre oblique (/) pour remplacer le mot « par » (p. ex., km/h). Dresse une liste d'au moins trois autres taux que tu pourrais exprimer en utilisant le mot « par ».

7. Quel pourcentage pourrais-tu chercher à représenter à l'aide d'une grille de 100 cases si tu ombrais :



a) 1 case sur 2?

b) les colonnes 1, 2, 4, 5, 7, et 8?

c) 1 case sur 4?

d) presque toutes les cases, mais pas toutes?

e) uniquement quelques cases ici et là?

8. Un matin, 5 % des personnes présentes dans une école élémentaire sont des adultes.

a) Quel pourcentage des personnes présentes ne sont pas des adultes?

b) Quel est le rapport entre le nombre d'élèves et le nombre d'adultes dans l'école?

9. Indique si chacun des énoncés suivants a du bon sens ou pas. Explique ton raisonnement.

a) Tu fais des exercices durant 30 % de la journée.

b) Si tu joues à pile ou face, la pièce de monnaie tombera sur le côté face 50 % des fois.

c) Un cent vaut 1 % d'un dollar.

d) Le chandail que tu aimerais acheter est réduit de 5 % et celui que ton ami aimerait acheter est réduit de 10 %. La réduction, en dollars, dont tu profiterais serait alors inférieure à la réduction, en dollars, dont ton ami profiterait.

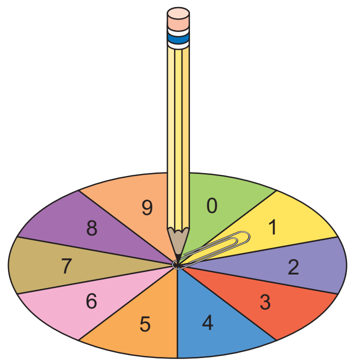
Formes équivalentes de rapports, de taux et de pourcentages

Question ouverte

Toute fraction peut être représentée sous des formes équivalentes.

Par exemple, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, $\quad \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, $\quad \frac{4}{100} = 0{,}04$.

De même, les rapports, les taux et les pourcentages peuvent être représentés sous des formes équivalentes.



- **Étape 1 :** Fais tourner la roulette 9 fois et inscris chaque nombre obtenu dans une des cases des expressions suivantes.

Rapport	Taux	Pourcentage
☐☐ : ☐☐	☐☐ km/☐ h	☐☐ %

- **Étape 2 :** Exprime chacune des expressions obtenues ci-dessus sous une forme équivalente qui comprend le nombre 10.

- **Étape 3 :** Répète 2 fois les étapes 1 et 2.

Rapport	Taux	Pourcentage
☐☐ : ☐☐	☐☐ km/☐ h	☐☐ %

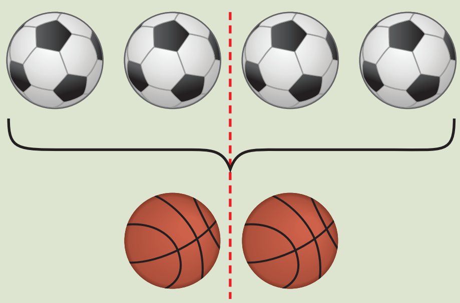
Rapport	Taux	Pourcentage
☐☐ : ☐☐	☐☐ km/☐ h	☐☐ %

Fiche de réflexion

Il existe plusieurs façons de décrire un même rapport ou taux. Leurs **formes équivalentes** peuvent être d'autres rapports ou taux, ou bien des fractions ou des pourcentages.

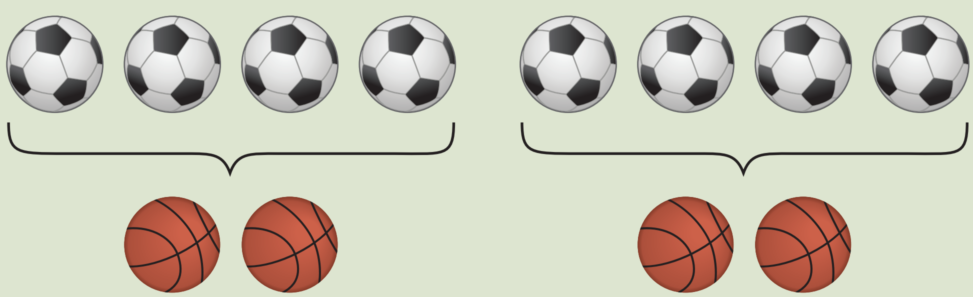
Rapport

- Par exemple, si le gymnase dispose de 4 ballons de soccer pour 2 ballons de basketball, le rapport entre le nombre de ballons de soccer et le nombre de ballons de basketball est de 4 : 2. Cela signifie que pour 2 ballons de soccer, il y a 1 ballon de basketball.



4 : 2 = 2 : 1

Le même rapport peut également s'écrire 8 : 4, puisque pour 8 ballons de soccer, on aura 4 ballons de basketball.



4 : 2 = 8 : 4

Puisque la relation entre les deux termes est la même dans chacun de ces rapports (le premier terme est le double du second), les rapports sont donc équivalents.

Tout comme avec les fractions, si l'on multiplie les deux termes d'un rapport par un même nombre, on obtient un rapport équivalent.

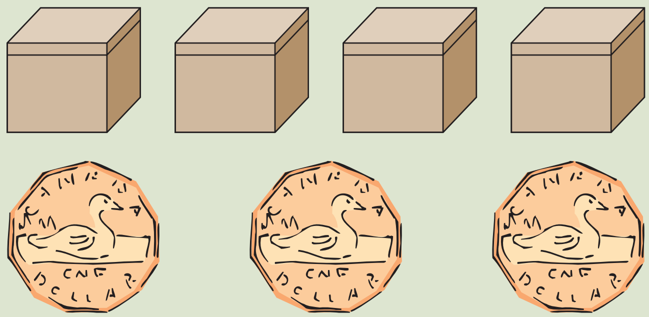
$\times 2$ $\times 3$

2 : 1 = 4 : 2 = 12 : 6

Une expression représentant l'égalité entre deux rapports s'appelle une **proportion**. Par exemple, 2 : 1 = 4 : 2 est une proportion.

Taux

- Il en va de même pour les taux. Un taux de 3 $ pour 4 boîtes équivaut à un taux de 6 $ pour 8 boîtes, de 9 $ pour 12 boîtes, de 1,50 $ pour 2 boîtes ou de 75 ¢ pour 1 boîte.



Le taux équivalent 75 ¢ pour 1 boîte s'appelle le **taux unitaire** parce qu'il correspond au coût pour 1 boîte.

Pourcentage

- Les pourcentages sont des rapports sur 100. Par exemple, 25 % signifie 25 de 100 éléments, soit 25 : 100 ou $\frac{25}{100}$.

  Les pourcentages peuvent donc être exprimés à l'aide de rapports équivalents ou de fractions équivalentes. Par exemple, 25 % = 25 : 100 = 1 : 4 = 50 : 200. De même, 25 % = $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ou toute fraction équivalente à $\frac{1}{4}$ (p. ex., $\frac{50}{200}$ ou $\frac{100}{400}$).

Lorsqu'un rapport est exprimé sous une forme où les deux termes n'ont pas de facteur commun, on dit que le rapport est irréductible. Par exemple, 50 : 100 est réductible, mais son rapport équivalent 1 : 2 est irréductible.

1. Parmi les rapports suivants, lesquels sont équivalents?

a) 2 : 5 et 2 : 3

b) 2 : 5 et 4 : 10

c) 4 : 10 et 6 : 15

2. Démontre à l'aide d'un dessin que le rapport 4 : 5 est équivalent au rapport 8 : 10. Indique en quoi ton dessin montre l'équivalence.

3. Voici quelques colonnes d'un tableau de valeur de position :

…	10 000	1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	…

Montre que tous les rapports entre le nombre dans l'en-tête de l'une des colonnes du tableau et le nombre dans l'en-tête de deux colonnes à la droite de celle-ci sont équivalents.

4. Inscris un nombre dans chacune des cases de façon à obtenir des rapports équivalents. Explique la stratégie que tu as utilisée pour les questions c) et e).

a) 4 : 10 = 2 : ☐ **b)** 6 : 8 = 9 : ☐ **c)** 8 : ☐ = 20 : 10

d) 52 : 13 = ☐ : 300 **e)** 3,5 : 10,5 = ☐ : 6 **f)** 5 : 8 = 1 : ☐

5. Une méthode pour comparer des rapports consiste à s'aider de rapports équivalents. Imaginons qu'un dessert nécessite 4 tasses de fraises pour 3 tasses de bleuets et qu'un autre dessert nécessite 2 tasses de fraises pour 1 tasse de bleuets. Comment peux-tu utiliser des rapports équivalents pour t'aider à comparer le rapport entre le nombre de tasses de fraises et le nombre de tasses de bleuets dans chacune des recettes et ainsi déterminer quel dessert aura davantage le goût de fraise que de bleuet?

6. Le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles dans une classe est de 7 : 3, alors qu'il est de 3 : 2 dans une autre classe. Quelle classe comprend la plus grande part de garçons? Comment le sais-tu?

7. Une voiture parcourt 32 kilomètres toutes les 15 minutes. Une autre voiture roule à une vitesse de 120 km/h. À l'aide de rapports équivalents, détermine laquelle des deux voitures roule le plus rapidement.

8. Cinq savons coûtent 3,89 $. Écris un énoncé qui décrit un taux équivalent.

9. Le tableau ci-dessous indique le rythme cardiaque de certains animaux.

Chien	Lion	Éléphant	Poule
200 pulsations en 2 minutes	40 pulsations en 1 minute	140 pulsations en 4 minutes	120 pulsations en 30 secondes

a) Détermine le taux unitaire (nombre de pulsations en 1 minute) de chacun des rythmes cardiaques.

b) Quel animal a le cœur qui bat le plus vite?

10. Quelle fraction, ayant un numérateur égal à 1 ou à 2, représente une valeur presque équivalente aux pourcentages suivants? Justifie ton raisonnement.

a) 30 % **b)** 15 % **c)** 70 % **d)** 11 %

11. La population du Canada augmente de 1,3 % par année.

a) Exprime 1,3 % sous la forme d'une fraction équivalente.

b) Une croissance de 25 personnes pour 2 000 habitants décrit-elle un taux plus grand ou plus petit? Justifie ta réponse.

12. Camille a obtenu 12 bonnes réponses sur 15 questions à choix multiple. Exprime le nombre de bonnes réponses obtenues sous forme de pourcentage.

13. Des 50 élèves inscrits à un concours de musique, 12 sont en 9^e année, 10 sont en 10^e année, 13 sont en 11^e année, et 15 sont en 12^e année. Détermine le pourcentage d'élèves de chaque année d'études qui sont inscrits au concours.

14. Un nombre vaut 20 % du nombre A et 40 % du nombre B.

a) Lequel des nombres A et B est le plus grand?

b) Quelle est la relation entre ces deux nombres?

Résolution de problèmes comportant des rapports et des taux

Question ouverte

Chloé prétend que les énoncés suivants sont vrais.

a) Si l'on parcourt 30 kilomètres sur l'autoroute en 17 minutes, on va alors parcourir à cette vitesse 38 kilomètres en 25 minutes.

b) Si dans un grand groupe composé d'adultes et d'enfants, le rapport entre le nombre d'adultes et le nombre d'enfants est de 5 : 3, alors le nombre total de personnes dans le groupe est obligatoirement un multiple de 8.

c) Si 1 $ américain vaut 1,08 $ canadien, alors 1 $ canadien vaut 92 ¢ américains.

d) Si le rapport entre les bases de deux rectangles différents est de 5 : 2 et que le rapport entre les hauteurs de ces rectangles est aussi de 5 : 2, alors le rapport entre leurs diagonales, le rapport entre leurs périmètres et le rapport entre leurs aires sont également de 5 : 2.

- Selon toi, lesquels des énoncés sont vrais? Justifie ta réponse.

- Selon toi, lesquels sont faux? Justifie ta réponse.

- Crée un énoncé du même type qui est vrai. Démontre qu'il est vrai.

- Crée un énoncé du même type qui semble vrai, mais qui ne l'est pas. Démontre qu'il est faux.

Fiche de réflexion

Il peut arriver qu'une situation soit représentée par un rapport ou un taux, mais que l'on ait besoin de la représenter sous une forme équivalente pour résoudre le problème. En voici deux exemples.

Problème de rapport

Le rapport entre la longueur et la largeur du drapeau canadien est censé être de 2 : 1. Si l'on veut confectionner un drapeau canadien d'une longueur de 51 cm, quelle doit être sa largeur?

On cherche un rapport qui est équivalent à 2 : 1 et dont le premier terme est 51, c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer la valeur de $\boxed{}$ dans la proportion suivante.

$$\overset{\times\,?}{\overbrace{2 : 1 = 51}} : \boxed{}.$$

- Une façon de résoudre ce problème consiste à déterminer par quel nombre on doit multiplier 2 pour obtenir 51, et à multiplier ensuite 1 par ce même nombre. Puisque 51 ÷ 2 = 25,5, on doit donc multiplier 2 par 25,5 pour obtenir 51. La largeur du drapeau est alors 25,5 cm (1 × 25,5).
- Une autre façon de résoudre ce problème consiste à remarquer que la largeur du drapeau est toujours égale à la moitié de la longueur. Il suffit donc de calculer la moitié de 51 cm, ce qui fait également 25,5 cm.

Problème de taux

Une famille parcourt 130 kilomètres en 1,6 heure. Quelle distance va-t-elle parcourir en 2 heures si elle maintient la même vitesse?

On cherche un taux qui est équivalent à 130 kilomètres en 1,6 heure et dont le deuxième terme est 2, c'est-à-dire que l'on cherche la valeur de $\boxed{}$ dans l'équation suivante.

$$\frac{130}{1{,}6} \overset{\times\,?}{=} \frac{\boxed{}}{2}$$

- On pourrait d'abord déterminer par quel nombre on doit multiplier 1,6 pour obtenir 2, puis multiplier ce nombre par 130.

  $2 \div 1{,}6 = 1{,}25$

  $1{,}25 \times 130 = 162{,}5$

  La famille va donc parcourir 162,5 kilomètres en 2 heures.

- On pourrait aussi diviser 130 par 1,6 (ce qui donne 81,25) afin de déterminer le taux unitaire, c'est-à-dire le nombre de kilomètres que la famille parcourt en 1 heure. En 2 heures, elle peut donc parcourir une distance deux fois plus grande, soit 162,5 kilomètres.

- On pourrait également résoudre ce problème en créant un **tableau de rapports**. Un tableau de rapports est un tableau où les colonnes représentent des rapports ou des taux équivalents. En voici un exemple :

Nombre de garçons	3	6	9	15
Nombre de filles	4	8	12	20

On peut obtenir un rapport équivalent en **multipliant** ou en **divisant** les deux termes d'une colonne par le même nombre (p. ex., 3 × **2** = 6 et 4 × **2** = 8). On peut également obtenir un rapport équivalent en **additionnant** ou en **soustrayant** les termes correspondants de deux colonnes (p. ex., 6 + 9 = 15 et 8 + 12 = 20). Cette dernière opération s'explique par le fait que l'on combine deux rapports qui sont équivalents au rapport 3 : 4. Puisque chaque rapport représente un certain nombre de groupes de 3 éléments correspondant à un certain nombre de groupes de 4 éléments, en les combinant, on aura toujours des groupes de 3 éléments correspondant à des groupes de 4 éléments.

Pour revenir au problème de la famille et de la distance à parcourir, on peut donc créer un tableau de rapports en commençant par poser un taux dont les termes sont 130 et 1,6. Puis, on peut manipuler les valeurs conformément aux règles ci-dessus afin d'essayer d'obtenir un 2 dans la deuxième rangée, puisqu'on veut connaître la distance parcourue en 2 heures. Il y a toujours plusieurs façons d'établir un tableau de rapports. En voici un exemple :

÷ 8 × 10

Distance	130	16,25	162,5
Temps	1,6	0,2	2

÷ 8 × 10

1. Une voiture consomme 10 litres d'essence pour parcourir 100 kilomètres. Combien de litres d'essence consommera-t-elle pour parcourir les distances suivantes?

a) 300 kilomètres

b) 450 kilomètres

c) 75 kilomètres

2. Tara dénombre 32 battements de son cœur en 24 secondes. Exprime son rythme cardiaque en nombre de battements par minute?

3. Un coureur de compétition met environ 30 minutes pour parcourir 10 kilomètres.

a) Quel taux unitaire représente sa vitesse en kilomètres par minute?

b) Quel taux unitaire représente sa vitesse en minutes par kilomètre?

4. Une certaine teinte de peinture s'obtient en mélangeant 2 pots de peinture blanche à 5 pots de peinture rouge. Pour obtenir la même teinte, combien de pots de peinture blanche doit-on mélanger à 13 pots de peinture rouge? Explique ton raisonnement.

5. Une recette pouvant servir 8 personnes nécessite 908 grammes de viande. De quelle quantité de viande a-t-on besoin si l'on veut préparer la recette pour servir :

a) 4 personnes?

b) 12 personnes?

c) 15 personnes?

6. Si 6 boîtes de 300 ml de soupe de la marque A coûtent 7,74 $ et que 4 boîtes de 300 ml de soupe de la marque B coûtent 5,44 $, décris trois façons différentes de déterminer l'achat le plus avantageux.

7. Un ordinateur peut télécharger un fichier de 11,6 Mo en 1 seconde.

a) À cette vitesse, combien de temps prendra-t-il pour télécharger un fichier de 5 Mo?

b) Si un autre ordinateur prend 103 secondes pour télécharger le fichier de 11,6 Mo, combien de temps prendra-t-il pour télécharger un fichier de 5 Mo?

8. Le taux de natalité au Canada a été établi à 10,28 naissances par 1 000 habitants.

a) Si la population du Canada est d'environ 33 millions d'habitants, environ combien d'enfants naissent chaque année?

b) Si le rapport entre les naissances de garçons et les naissances de filles est de 1,06 : 1, environ combien d'enfants nés chaque année sont des garçons?

9. Un conducteur très prudent parcourt une certaine distance en 35 minutes, à une vitesse de 60 km/h. Combien de temps gagnerait-il s'il roulait à la vitesse permise de 70 km/h? Explique ton raisonnement.

10. Une carte est produite selon une échelle de 1 : 10 000. Si deux endroits sont séparés de 3 cm sur la carte, quelle distance les sépare en réalité? Exprime ta réponse en utilisant deux unités de mesure métriques différentes.

11. Le rapport entre le périmètre d'un hexagone régulier (hexagone dont les six côtés sont égaux) et le périmètre d'un carré est de 6 : 2. Quelle relation y a-t-il entre les longueurs des côtés de ces deux figures géométriques?

12. a) Dessine un rectangle dont le rapport entre la hauteur et la diagonale est de 1 : 3. Explique ta façon de procéder.

b) Fais une estimation du rapport entre la base et la hauteur du rectangle.

c) Ce rapport entre la base et la hauteur du rectangle s'applique-t-il à tous les rectangles dont le rapport entre la hauteur et la diagonale est de 1 : 3? Comment le sais-tu?

Résolution de problèmes comportant des pourcentages

Question ouverte

Nathan prétend que les énoncés suivants sont vrais.

a) Si le prix d'un article réduit de 10 % est réduit d'un autre 15 %, c'est comme s'il était réduit de 25 %.

b) Si l'on veut calculer le prix à payer pour un article qui est réduit de 10 %, et pour lequel il faut payer la taxe de 13 %, il suffit d'ajouter 3 % au prix courant de l'article.

c) Si l'on veut connaître le prix d'un article réduit de 35 %, il suffit de calculer 65 % de son prix courant.

d) Si un petit nombre représente 80 % d'un nombre plus grand, alors ce nombre plus grand représente 120 % du nombre plus petit.

- Selon toi, lesquels des énoncés sont vrais? Justifie ta réponse.

- Selon toi, lesquels des énoncés sont faux? Justifie ta réponse.

- Crée un énoncé du même type qui est vrai. Démontre qu'il est vrai.

- Crée un énoncé du même type qui semble vrai, mais qui ne l'est pas. Démontre qu'il est faux.

Fiche de réflexion

Pour résoudre certains problèmes comportant des pourcentages, il est utile de déterminer un rapport équivalent dont le second terme est différent de 100. Les stratégies à utiliser varient quelque peu selon que l'on connaît le tout ou que l'on connaît une partie du tout.

Si l'on connaît le tout

- Supposons, par exemple, qu'une école compte 720 élèves. Au moins 60 % d'entre eux sont tenus de participer à une collecte de fonds avant qu'un commanditaire accepte de parrainer un événement scolaire. On souhaite savoir exactement combien d'élèves doivent participer à la collecte de fonds. Ainsi, on souhaite déterminer un rapport qui est équivalent à 60 : 100 (60 %) et qui se présente sous la forme $\square$: 720.

  On peut résoudre ce problème à l'aide d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un tableau de rapports.

  À l'aide d'une fraction

  $60\ \% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

  $$\begin{aligned}\text{Donc, } 60\ \%\text{ de } 720 &= \frac{3}{5} \times 720\\ &= \frac{(3 \times 720)}{5}\\ &= \frac{2\,160}{5}\\ &= 432\end{aligned}$$

  On peut aussi utiliser certains pourcentages simples comme repères.
  Par exemple, puisque $10\ \% = \frac{1}{10}$, alors $10\ \%$ de $720 = \frac{1}{10}$ de $720 = 72$.
  Puisque 60 % vaut 6 fois plus, on a alors $6 \times 72 = 432$.

  À l'aide d'un nombre décimal

  $60\ \% = \frac{60}{100} = 0{,}60$

  Donc, 60 % de 720 = $0{,}60 \times 720 = 432$.

  Il est aussi possible de résoudre ce problème en le représentant à l'aide d'une proportion, soit 60 : 100 = $\square$: 720.

  Pour résoudre cette proportion, on divise 720 par 100 pour déterminer par quel nombre on doit multiplier 100 pour obtenir 720. On multiplie ensuite 60 par ce nombre.
  $720 \div 100 = 7{,}2$
  $60 \times 7{,}2 = 432$

À l'aide d'un tableau de rapports

Un **tableau de rapports** est un tableau où les colonnes représentent des rapports ou des taux équivalents. En voici un exemple :

Nombre de garçons	3	6	9	15
Nombre de filles	4	8	12	20

On peut obtenir un rapport équivalent en **multipliant** ou en **divisant** les deux termes d'une colonne par le même nombre (p. ex., $3 \times \mathbf{2} = 6$ et $4 \times \mathbf{2} = 8$). On peut également obtenir un rapport équivalent en **additionnant** ou en **soustrayant** les termes correspondants de deux colonnes (p. ex., $6 + 9 = 15$ et $8 + 12 = 20$). Cette dernière opération s'explique par le fait que l'on combine deux rapports qui sont équivalents au rapport 3 : 4. Puisque chaque rapport représente un certain nombre de groupes de 3 éléments correspondant à un certain nombre de groupes de 4 éléments, en les combinant, on aura toujours des groupes de 3 éléments correspondant à des groupes de 4 éléments.

Pour revenir au problème de pourcentage, on peut le résoudre à l'aide d'un tableau de rapports en inscrivant les termes de la proportion $60 : 100 = \square : 720$ dans le tableau comme suit :

60			
100			720

On peut obtenir 720 à partir de 20 et de 700.

Étape 1 : Pour obtenir 20, on divise 100 par 5.

÷ 5

60	12		
100	20		720

÷ 5

Étape 2 : Pour obtenir 700, on multiplie 100 par 7

× 7

60	12	420	
100	20	700	720

× 7

Étape 3 : On a maintenant 700 et 20 dans la même rangée, que l'on peut additionner pour obtenir 720.

+

60	12	420	432
100	20	700	720

+

Note : On aurait également pu multiplier la colonne 2 par 36, puisque 36 × 20 = 720, sans passer par l'étape 2. On aurait alors aussi multiplié 12 par 36 et obtenu directement le même résultat, soit 432 (12 × 36).

- Ces stratégies peuvent être utilisées même si le pourcentage est supérieur à 100 % ou s'il est exprimé à l'aide d'un nombre décimal. Par exemple, si l'on souhaite déterminer 132 % de 420, on peut multiplier 420 par la fraction $\frac{132}{100}$ ou par le nombre décimal 1,32. On peut également inscrire les nombres 132 et 100 dans une colonne d'un tableau de rapports, ou encore résoudre l'équation $\frac{132}{100} = \frac{\square}{420}$.

Si l'on connaît une partie du tout

Les stratégies précédentes peuvent être adaptées pour résoudre des problèmes où l'on connaît une partie du tout plutôt que le tout.

- Supposons, par exemple, que 39 élèves d'une école font du bénévolat à la soupe populaire de leur quartier et que ces 39 élèves représentent 15 % des élèves de l'école. On souhaite déterminer le nombre total (t) d'élèves de l'école.

  On peut résoudre ce problème à l'aide d'un nombre décimal, d'une proportion, de pourcentages repères ou d'un tableau de rapports.

À l'aide d'un nombre décimal

On sait que $0{,}15 \times t = 39$. Pour résoudre cette équation, il suffit de diviser 39 par 0,15. On obtient alors $t = \frac{39}{0{,}15} = 260$.

À l'aide d'une proportion

On peut représenter le problème à l'aide de la proportion 15 : 100 = 39 : $\square$. Pour résoudre cette proportion, on divise 39 par 15 afin de déterminer par quel nombre on doit multiplier 15 pour obtenir 39. On multiplie ensuite ce nombre par 100.

39 ÷ 15 = 2,6

2,6 × 100 = 260

À l'aide de pourcentages repères

Puisque 15 % des élèves de l'école correspond à 39 élèves, alors 5 % correspond à $\frac{1}{3}$ de 39, soit à 13 élèves. Ainsi, 10 % correspond à 26 élèves (2 × 5 %) et 100 % correspond à 260 élèves (10 × 10 %).

À l'aide d'un tableau de rapports

On détermine un rapport équivalent à 15 : 100 où le premier terme est 39.

÷ 5 × 13

15	3	39
100	20	260

÷ 5 × 13

1. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vraisemblables? Pourquoi?

a) 30 % de 58 vaut environ 12.

b) 74 % de 82 vaut environ 60.

c) 110 % de 93 vaut environ 100.

2. Dans chacun des cas suivants, crée une question qui comporte un pourcentage et dont la solution peut être déterminée par le calcul donné.

a) 0,35 × 48

b) $\frac{3}{4} \times 88$

c) 45 ÷ 0,2

3. Il est souvent recommandé de laisser un pourboire de 15 % au restaurant pour récompenser un bon service. Si un repas coûte 45,29 $, quel pourboire laisserais-tu si tu décides de laisser environ 15 %? Explique comment on peut estimer ce montant sans utiliser une calculatrice.

4. Pour déterminer le coût d'un article d'une valeur de 89 $, tu dois tenir compte de la taxe de 13 %.

a) Comment pourrais-tu estimer le montant de la taxe sans la calculer?

b) Quel est le montant exact de la taxe pour cet article?

c) Quel est le coût total de l'article, taxe comprise?

5. Anik calcule le coût d'un article, incluant la taxe de 13 %, en multipliant le prix de l'article par 1,13. Explique pourquoi ce calcul est approprié.

6. Janique a acheté une blouse en solde à 30 %. Elle dit que sans compter la taxe, la blouse lui a coûté 34,97 $. Détermine le prix courant de la blouse et décris la stratégie que tu as employée.

7. Ethan avait 550 $ dans son compte bancaire. Il a retiré 50 $ pour acheter un cadeau.

a) Quel pourcentage de ses économies initiales lui reste-t-il?

b) Combien d'argent aurait-il pu utiliser s'il avait voulu conserver 70 % de ses économies initiales?

8. La longueur des côtés d'un carré correspond à 112,5 % de la longueur des côtés d'un autre carré. Quel pourcentage l'aire du grand carré représente-t-elle par rapport à l'aire du petit carré? Décris la stratégie utilisée et explique en quoi la réponse obtenue est vraisemblable.

9. Un nouvel employé dans une entreprise gagne 63 % du salaire d'un employé plus expérimenté. Si un salarié expérimenté gagne 57 000 $, quel est le salaire du nouvel employé?

10. Il est prévu que la population d'une ville de 4 827 habitants croisse de 3,2 % en 1 an.

a) Selon les prévisions, quel sera le nombre d'habitants après 1 an?

b) Quel pourcentage la population prévue dans 1 an représente-t-elle par rapport à la population actuelle?

c) Quel pourcentage la population actuelle représente-t-elle par rapport à la population prévue dans 1 an?

11. Quelles sont les ressemblances et les différences entre les méthodes de résolution des deux problèmes suivants?

À : J'ai dépensé 40 $, ce qui représentait 24 % de mes économies. Quel était le montant de mes économies?

B : J'ai dépensé 24 % des 40 $ que j'avais. Combien d'argent ai-je dépensé?

Roulette